2023 年度（令和 5 年度）大学院入試 (第 2 次募集)

数 学 問 題

実施日時

2022 年（令和 4 年）11 月 19 日（土）

10:00～12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない．
- 問題冊子は表紙も入れて 5 枚である．
- 問題は全部で 4 問である．
- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙 1 枚に記入すること．答案用紙の裏面に記入してもよい．
- それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること．
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

[1] 実数値関数 f は開区間 $(0,1)$ において微分可能で, その導関数 f' は開区間 $(0,1)$ において連続とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 右極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x)$ が存在するならば右極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ が存在することを示せ.

(2) 逆に右極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ が存在するならば右極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x)$ は存在するか. 一般に成立するならばそのことを示し, そうでないならば反例を挙げよ.

[2] $\mathbb{K}$ を体とし，V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とする．$f \circ f = f$ を満たす $\mathbb{K}$ 線形写像 $f\colon V \to V$ を考え，写像 $g\colon V \to V$ を

$$g(v) = v - f(v) \quad (v \in V)$$

で定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) g は $\mathbb{K}$ 線形写像であることを示せ．

(2) $\mathrm{Im}(g)$ は g の像を表し，$\mathrm{Ker}(f)$ は f の核を表すとする．$\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$ を示せ．

(3) V は $\mathrm{Im}(f)$ と $\mathrm{Ker}(f)$ の直和であること，つまり，以下の 2 条件を満たすことを示せ．

1. $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_V\}$.（ただし，$0_V$ は V の零ベクトルを表す.）
2. V の任意の元 v は，$\mathrm{Im}(f)$ の元 v_1 と $\mathrm{Ker}(f)$ の元 v_2 により $v = v_1 + v_2$ と書ける．

[3] 関数 $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$d(x,y)=|e^x-e^y|$$

で定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) d は $\mathbb{R}$ 上の距離関数であることを示せ.

(2) 距離空間 $(\mathbb{R},d)$ は完備ではないことを示せ.

(3) $(\mathbb{R},d)$ 上の縮小写像 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ で, 全ての $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x)\neq x$ となるものの例を一つ与えよ．ただし, f が縮小写像であるとは, ある $c\in[0,1)$ が存在し, 全ての $x,y\in\mathbb{R}$ で

$$d\big(f(x),f(y)\big)\leq c\,d(x,y)$$

が成り立つことである.

[4] 次の問いに答えよ.

(1) 複素平面上の有理型関数 $f(z)$ が $z=a$ で一位の零点を持つとき, $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ の $z=a$ における留数は $\dfrac{1}{f'(a)}$ で与えられることを示せ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^6}$ の値を求めよ.