2022年度（令和4年度）大学院入試

数学問題

実施日時

2021年（令和3年）11月20日（土）

10:00〜12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて5枚である.
- 問題は全部で4問である.
- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙1枚に記入すること．答案用紙の裏面に記入してもよい.
- それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること.
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

[1] f を区間 $[-1,1]$ 上でリーマン積分可能な実数値有界関数とし，F は $x \in [-1,1]$ に対して

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$$

で定義される関数とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) f が $x=0$ において連続であるならば，F は $x=0$ において微分可能で $F'(0) = f(0)$ が成り立つことを示せ．

(2) F が $x=0$ で微分可能とはならないような f の例を理由付きで挙げよ．

(3) 区間 $[-1,1]$ において連続で，かつ開区間 $(-1,1)$ で微分可能な関数 G で，任意の $x \in (-1,1)$ に対して $G'(x) = f(x)$ を満たすものが存在するならば

$$G(1) - G(-1) = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$$

が成り立つことを証明せよ．

[2] 実数を成分とする5次列ベクトル全体のなす実ベクトル空間を $\mathbb{R}^5$ であらわす．写像 $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

で定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) f は線形写像であることを示せ．

(2) f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の基底を1組求めよ．

(3) 線形変換 $g : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

で定めるとき，$g(\mathrm{Ker}(f)) \subset \mathrm{Ker}(f)$ を示せ．

(4) g を $\mathrm{Ker}(f)$ に制限して得られる線形変換 $g|_{\mathrm{Ker}(f)} : \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow \mathrm{Ker}(f)$ の固有値を複素数の範囲ですべて求めよ．

[3] X を空でない集合とする．X の部分集合系 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} := \{U \subset X \mid U^c \text{ は有限集合 }\} \cup \{\emptyset\}$$

と定義する．ただし，U^c は X に関する U の補集合を表し，$\emptyset$ は空集合を表す．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $(X, \mathcal{O})$ は位相空間であることを示せ．

(2) X が有限集合であるとき，位相空間 $(X, \mathcal{O})$ から任意の位相空間への任意の写像は連続であることを示せ．

(3) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が連結であるための X についての必要十分条件を，理由とともに答えよ．

[4] 複素平面上の有理関数

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$$

を考える．このとき，次の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位を表す．

(1) $f(z)$ の $z=i$ における留数を求めよ．

(2) $R>1$ に対して，曲線 Γ_R を Γ_R : $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ で定める．このとき

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 0$$

が成り立つことを示せ．

(3) 次の広義積分の値を求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx.$$