2019 年度（平成 31 年度）大学院入試

数学問題B

実施日時

2018 年（平成 30 年）8 月 22 日（水）

13:30〜16:30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて 7 枚，問題は全部で 6 問である.
- ６問の中からちょうど３問を選択して解答すること. 下の欄に, 受験番号, 氏名を記入し, 選択した問題の番号を○で囲め.

受験番号	氏名

選択問題番号						
	1	2	3	4	5	6

- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙 1 枚に記入すること.
  答案用紙の裏面に記入してもよい.
- それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること.
- 問題冊子の表紙，答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

[1] 有限体 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の元を係数とする x の多項式全体のなす可換環

$$A = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[x]$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x) = x^2 + 1 \in A$ とおく. $f(x)$ が生成する A の単項イデアルを $I = (f(x))$ とする. このとき, 剰余環 A/I は体であることを示せ.

(2) 剰余環 A/I の乗法群 $(A/I)^\times$ は巡回群となる. この巡回群の生成元をひとつ求めよ.

(3) $g(x) = x^2+ax+b \in A$ $(a, b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ が生成する A の単項イデアルを $J = (g(x))$ とする. このとき, 次の条件 ($\sharp$) をみたすような組 (a, b) をすべて求めよ.

($\sharp$) : 剰余環 A/J は体であり, その乗法群 $(A/J)^\times$ は $\bar{x} = x + J \in A/J$ で生成される巡回群である.

[2] p は素数, n は正の整数とする. G を位数が p^n の群とし, Z を G の中心, すなわち

$$Z = \{g \in G \mid gh = hg,\ \forall h \in G\}$$

とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) Z は, 単位群でない G の正規部分群であることを示せ.

(2) 剰余群 G/Z が巡回群ならば, G は可換群であることを示せ. また, このことを用いて, $n = 2$ のとき G は可換群であることを示せ.

(3) $n = 3$ のとき, p を適当に選んで, 可換群でないような G の具体例をひとつ挙げよ.

[3] 正則な実 3 次正方行列全体のなす集合を $GL(3,\mathbb{R})$ とし，そのうち行列式が 1 となる行列全体のなす $GL(3,\mathbb{R})$ の部分集合を $SL(3,\mathbb{R})$ とする．

(1) $GL(3,\mathbb{R})$ に以下のすべての条件をみたすような C^∞ 多様体の構造を定めよ：

- 行列式をとる写像 $d : GL(3,\mathbb{R}) \ni A \mapsto \det(A) \in \mathbb{R}$ は C^∞ 級関数である．
- 逆行列をとる写像 $I : GL(3,\mathbb{R}) \ni A \mapsto A^{-1} \in GL(3,\mathbb{R})$ は C^∞ 級写像である．
- 多様体としての次元は 9 次元である．

(2) $SL(3,\mathbb{R})$ に以下のすべての条件をみたすような C^∞ 多様体の構造を定めよ：

- 逆行列をとる写像 $I : SL(3,\mathbb{R}) \ni A \mapsto A^{-1} \in SL(3,\mathbb{R})$ は C^∞ 級写像である．
- 多様体としての次元は 8 次元である．

[4] $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とする．直積位相空間 $S^2 \times [0, 1]$ において，点 $((x, y, z), 0)$ と $((-x, -y, -z), 1)$ を同一視して得られる商位相空間を M とする．

(1) M には 3 次元 C^∞ 多様体の構造が入ることを示せ．

(2) M の整係数ホモロジー群 $H_n(M)$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ を求めよ．

[5] μ_d を d 次元ルベーグ測度とする. $\mathbb{R}^d$ 上の複素数値関数 f, g が, μ_d についてほとんどすべての $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ に対して等しいことを

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \qquad (\mu_d \text{ - a.e. } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d)$$

で表す. $\mathbb{R}$ 上の複素数値関数 f, g に対して, $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f \otimes g$ を

$$f \otimes g(x, y) = f(x)g(y) \qquad (x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R})$$

で定義する. 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathbb{R}$ 上の複素数値関数 f, φ, g, γ が

$$f(x) = \varphi(x) \quad (\mu_1 \text{ - a.e. } x \in \mathbb{R}) \quad \text{かつ} \quad g(x) = \gamma(x) \quad (\mu_1 \text{ - a.e. } x \in \mathbb{R})$$

をみたすとき,

$$f \otimes g(x, y) = \varphi \otimes \gamma(x, y) \qquad (\mu_2 \text{ - a.e. } (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}$ 上の複素数値ルベーグ可積分関数 f, g について, $f \otimes g$ は $\mathbb{R}^2$ 上ルベーグ可積分であることを示せ. ただし, $f \otimes g$ がルベーグ可測であることは証明なしに用いてよい.

(3) $\mathbb{R}$ 上の複素数値ルベーグ可積分関数 f, g について,

$$f \otimes g(x, y) = 0 \qquad (\mu_2 \text{ - a.e. } (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

ならば

$$f(x) = 0 \quad (\mu_1 \text{ - a.e. } x \in \mathbb{R}) \quad \text{または} \quad g(x) = 0 \quad (\mu_1 \text{ - a.e. } x \in \mathbb{R})$$

であることを示せ.

(4) f, φ, g, γ を $\mathbb{R}$ 上の複素数値ルベーグ可積分関数とする. f と φ が「複素数 α, β に対して $\alpha f(x) + \beta\varphi(x) = 0$ (μ_1 - a.e. $x \in \mathbb{R}$) となるのは $\alpha = \beta = 0$ のときに限る」という性質をもつとき,

$$f \otimes g(x, y) + \varphi \otimes \gamma(x, y) = 0 \qquad (\mu_2 \text{ - a.e. } (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

ならば

$$g(x) = \gamma(x) = 0 \qquad (\mu_1 \text{ - a.e. } x \in \mathbb{R})$$

であることを示せ.

[6] $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を有界連続関数とする. 実数値の未知関数 $u(x)$ についての常微分方程式

$$-u''(x)+u'(x)+2u(x)=f(x) \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

を考える. 関数 $K:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$K(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{2x}}{3} & (x\leq 0) \\[2ex] \dfrac{e^{-x}}{3} & (x>0) \end{cases}$$

で定め, $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$v(x)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y)f(y)\,dy \qquad (x\in\mathbb{R})$$

で定める.

(1) $v(x)$ は $(*)$ の $\mathbb{R}$ 上での有界な解であることを示せ.

(2) $(*)$ の $\mathbb{R}$ 上での有界な解はただひとつしかないことを示せ.

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}|f(x)|\,dx<\infty$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}v(x)=0$ を示せ.