2018年度（平成30年度）大学院入試

数学問題A

実施日時

2017年（平成29年）8月23日（水）

9:00〜12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて5枚, 問題は全部で4問である.
- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙1枚に記入すること.
  答案用紙の裏面に記入してもよい.
- それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること.
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

[1] X, Y を位相空間, $f\colon X \longrightarrow Y$ を連続写像とする. 以下の主張について, 真である場合には証明を与え, 偽である場合には反例を挙げよ.

(1) X が連結であれば, 像 $f(X)$ も連結である.

(2) X がハウスドルフであれば, 像 $f(X)$ もハウスドルフである.

(3) X がコンパクトであれば, 像 $f(X)$ もコンパクトである.

[2] nを正の整数, V を n 次元複素ベクトル空間とする.

(1) dを正の整数, f を V から V への線形写像とする. f の $(d-1)$ 回合成写像 $f^{d-1} = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{d-1}$ が零写像でなく f の d 回合成写像 $f^d = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{d}$ が零写像となるならば, $d \leqq n$ であることを示せ. ただし, f^0 は恒等写像とする.

(2) f を V から V への線形写像とし, f の像と核をそれぞれ $\mathrm{Im}(f)$ および $\mathrm{Ker}(f)$ であらわす. $f^2 = f$ ならば $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ を示せ. ただし, $\mathbf{0}$ は V の零ベクトルとする.

(3) 複素ベクトル空間 W の次元を $\dim_{\mathbb{C}}(W)$ であらわす. 集合

$$A = \{\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)) \mid f \text{ は } V \text{ から } V \text{ への線形写像}\}$$

の最大元, つまり A に属する最大の非負整数, を求めよ.

[3] p を実数とする. $\mathbb{R}$ 上の関数

$$f_n(x) = n^p x - n^{p+1} \sin \frac{x}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

および, 第 n 項が関数 $f_n(x)$ であるような級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

について考える. 以下を示せ.

(1) $p < 2$ ならば, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ である.

(2) $p < 1$ ならば, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は任意の有界閉区間上で一様収束する.

(3) 関数列 $\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots\}$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束しない. ただし, 必要ならば p の値に応じて場合分けして証明すること.

[4] i を虚数単位とする．複素関数 f を

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{e^z - e^{-z}}$$

によって定める．

(1) $z = 0$ および $z = i\pi$ における $f(z)$ の留数をそれぞれ求めよ．

(2) R を正の実数とする．複素平面上の積分路

$$\Gamma_R^+ : z = R + it \quad (0 \leqq t \leqq \pi), \quad \Gamma_R^- : z = -R + it \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

に対して

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R^+} f(z)\, dz = 0, \quad \lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R^-} f(z)\, dz = 0$$

を示せ．

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}}\, dx$ の値を求めよ．