2017 年度（平成 29 年度）大学院入試

数 学 問 題 B

実施日時

2016 年（平成 28 年）8 月 24 日（水）

13:30〜16:30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて 7 枚, 問題は全部で 6 問である.
- 6 問の中から ちょうど 3 問 を選択解答すること. 下の欄に, 受験番号, 氏名を記入し, 選択解答した問題の番号を○で囲め.

受験番号	氏名

選択問題番号						
	1	2	3	4	5	6

- 解答は, 問題ごとに別々の答案用紙 1 枚に記入すること. 答案用紙の裏面に記入してもよい.
- それぞれ の答案用紙に 受験番号, 氏名, 問題番号 を記入すること.
- 問題冊子の表紙, 答案用紙, 下書き用紙は終了後すべて提出し, 持ち帰ってはならない.

[1] $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1 \right\}$ とする． G の部分群 U, L をそれぞれ

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ x \in \mathbb{R} \right\}, \quad L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \middle| \ x \in \mathbb{R} \right\}$$

で定める．

(1) G の 2 元 g, h が $\mathrm{tr}(g) = \mathrm{tr}(h) > 2$ をみたすならば， g と h は G の元として共役であることを示せ．

(2) G は群として U と L で生成されることを示せ．

(3) G の正規部分群は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, および G 自身に限ることを示せ．

[2] $\mathbb{Z}$-加群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 任意の元 $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ に対して，0 でない整数 a で $ax = 0$ となるものが存在することを示せ．

(2) 任意の元 $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ および 0 でない整数 a に対して，元 $y \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ で $x = ay$ となるものが存在することを示せ．

(3) $\mathbb{Z}$-加群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は自由 $\mathbb{Z}$-加群かどうか，理由をつけて答えよ．

(4) $\mathbb{Z}$-加群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は有限生成かどうか，理由をつけて答えよ．

[3] $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ に対し,

$$g_{m,n} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (x + 2\pi m, (-1)^m y + 2\pi n),$$

とおき，次で定める $\mathbb{R}^2$ の同値関係 $\sim$ を考える．

$$(x,y) \sim (x', y') \iff \text{ある } (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \text{ が存在して，} \quad (x', y') = g_{m,n}(x,y).$$

この同値関係による商空間 $\mathbb{R}^2/\sim$ を M とし， 射影を $\pi \colon \mathbb{R}^2 \to M$ とする．M には，射影 π が C^∞ 写像で，その微分 $(d\pi)_p$ がすべての $p \in \mathbb{R}^2$ で階数 2 となるような C^∞ 多様体の構造を入れる．

(1) $\mathbb{R}^2$ の標準座標を (x,y) としたとき，次をみたす M 上の C^∞ 級の 1 形式 φ_0, ψ が存在することを示せ．

$$\pi^*\varphi_0 = dx, \quad \pi^*\psi = \cos x \cos y \, dx - \sin x \sin y \, dy$$

(2) $\psi = df$ となる M 上の C^∞ 関数 f を求めよ．

(3) M 上の C^∞ 級の 1 形式 φ が $d\varphi = 0$ をみたせば，ある定数 c と M 上の C^∞ 関数 h があって $\varphi = c\varphi_0 + dh$ と書けることを示せ．

[4] $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ を 2 次元トーラスとし，点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ の同値類が表す T の点を $[(x, y)]$ と書く．$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \middle| \, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}, \ \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\}$ とする．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の元とするとき，すべての $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $T \times [0, 1]$ の点 $([(x, y)], 1)$ と点 $([(ax + by, cx + dy)], 0)$ を同一視して得られる商空間を X_A とする．

(1) X_A は多様体となることを示せ．

(2) $k \in \mathbb{Z}$ に対して $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．1 次元整係数ホモロジー群 $H_1(X_{A_k}; \mathbb{Z})$ を求めよ．

(3) X_A が $T \times S^1$ と同相となるような $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ をすべて求めよ．ただし S^1 は円周とする．

[5] E を $\mathbb{R}^n$ のルベーグ可測集合とする． また $\mu(A)$ でルベーグ可測集合 A のルベーグ測度を表す．E 上の非負値可測関数 f と $t \geq 0$ に対して

$$D_t[f] = \{x \in E \mid f(x) > t\}$$

とし，その特性関数を $\chi_{D_t[f]}$ とする． すなわち

$$\chi_{D_t[f]}(x) = \begin{cases} 1 & (x \in D_t[f]) \\ 0 & (x \notin D_t[f]) \end{cases}$$

とする． また $0 < p < \infty$ とする．

(1) f を E 上の非負値可測関数とするとき，

$$\int_E f(x)^p dx = \int_0^\infty pt^{p-1} \left(\int_E \chi_{D_t[f]}(x) dx \right) dt$$

となることを示せ.

(2) f を E 上の非負値可測関数とし， 任意の $t \geq 0$ に対して

$$\mu\big(D_t[f]\big) \leq \frac{1}{(1+t^2)^2}$$

をみたすとする．このとき，

$$\int_E f(x)^2 dx \leq 1$$

となることを示せ.

(3) $\alpha, \beta > 0$ とし，$\alpha\beta^{-p} < 1$ とする．E 上の非負値可測関数 f, g は任意の $t \geq 0$ に対して

$$\mu\big(D_t[f] \cap D_t[g]^c\big) \leq \alpha\mu\big(D_{\beta t}[f]\big)$$

をみたすとする (ここで $D_t[g]^c$ は $D_t[g]$ の E における補集合を表す)． また

$$\int_E f(x)^p dx < \infty$$

とする． このとき，

$$\int_E f(x)^p dx \leq \frac{1}{1-\alpha\beta^{-p}} \int_E g(x)^p dx$$

となることを示せ.

[6] $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可積分な複素数値関数 f に対し，そのフーリエ変換 $\mathcal{F}[f]$ を

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\,dx \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

により定義する．ただし i は虚数単位とする．また，$\epsilon > 0$ に対して，$\mathbb{R}$ 上のルベーグ可積分関数 φ_ϵ を $\varphi_\epsilon(x) = e^{-\epsilon|x|}$ により定義する．

(1) $\psi(\xi) = \dfrac{2}{\xi^2+1}$ とするとき，$\mathcal{F}[\varphi_\epsilon](\xi) = \dfrac{1}{\epsilon}\psi\left(\dfrac{\xi}{\epsilon}\right)$ を示せ．

(2) $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可積分な複素数値関数 f に対し，次を示せ．

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\,\mathcal{F}[f](\xi)\,\varphi_\epsilon(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathcal{F}[\varphi_\epsilon](y-x)\,dy$$

(3) f は $\mathbb{R}$ 上の有界な複素数値関数で，点 $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続とする．このとき，$f, \mathcal{F}[f]$ が共に $\mathbb{R}$ 上ルベーグ可積分であれば，次が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix_0\xi}\,\mathcal{F}[f](\xi)\,d\xi = f(x_0)$$