2016 年度（平成 28 年度）大学院入試

数 学 問 題 A

実施日時

2015 年（平成 27 年）8 月 18 日（火）

9:00〜12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない．
- 問題冊子は表紙も入れて 5 枚である．
- 問題は全部で 4 問である．
- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙 1 枚に記入すること．答案用紙の裏面に記入してもよい．
- それぞれ の答案用紙に 受験番号，氏名，問題番号 を記入すること．
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

[1] 本問ではすべて実数の範囲で考える. 以下の問に答えよ.

(1) 正の実数 C で次をみたすものが存在することを示せ:

$$|x| \leq \frac{1}{2} \text{ ならば } |\log(1+x) - x| \leq Cx^2 \ .$$

(2) 2 つの級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ , \ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$$

が収束するならば, 無限積

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$$

は収束することを示せ.

(3) 無限積

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^k}{3k+1}\right)$$

は収束することを示せ.

[2] n を正の整数とする．A を実数を成分とする n 次正方行列とし，$\mathbb{R}^n$ を実数を成分とする n 次列ベクトル全体のなす実線形空間とする．$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像 f_A を

$$f_A(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$$

で定める．A に関する次の 2 つの条件 (i), (ii) を考える．ただし，A の固有値は複素数の範囲で考えるものとする．

(i) $f_A(W) \subset W$ となる任意の線形部分空間 $W \subset \mathbb{R}^n$ に対して，

$$f_A(W^\perp) \subset W^\perp$$

となる．ここで，$W^\perp$ は $\mathbb{R}^n$ の標準内積

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t\mathbf{x}\mathbf{y} \;\; (\mathbf{x}\,,\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n\,)$$

(${}^t\mathbf{x}$ は $\mathbf{x}$ の転置ベクトル) に関する W の直交補空間である．

(ii) A の固有値はすべて実数である．

以下の問に答えよ．

(1) A が対称行列であるとき，A は条件 (i), (ii) をともにみたすことを示せ．

(2) A が条件 (i), (ii) をともにみたすならば，A は対称行列であることを示せ．

[3] $\mathbb{R}$ の有界閉区間 $[0,1]$ の可算直積集合

$$[0,1]^\infty = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots) \mid x_k \in [0,1], k = 1, 2, \ldots\}$$

を考える. $[0,1]^\infty$ の任意の 2 点 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ に対し, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を次で定める:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |x_k - y_k| \ .$$

以下の問に答えよ.

(1) d は $[0,1]^\infty$ 上の距離であることを示せ.

(2) 距離空間 $([0,1]^\infty, d)$ において考える. 点列

$$\mathbf{x}_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots) \in [0,1]^\infty \ , \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

が,

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots) \in [0,1]^\infty$$

に収束するためには, 任意の正の整数 k に対して

$$\lim_{n \to \infty} x_{nk} = a_k$$

が成り立つことが必要十分である. これを示せ.

(3) 距離空間 $([0,1]^\infty, d)$ において, 任意の点列 $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty$ は収束部分列をもつことを示せ.

[4] 本問では i は虚数単位とする．以下の問に答えよ．

(1) $r > 0$ とする．複素平面上の積分路

$$C_r : z = re^{i\theta} \ , \ 0 \leq \theta \leq \pi$$

に対して

$$I(r) = \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

とおく．このとき，$\lim_{r \to 0} I(r)$ と $\lim_{r \to \infty} I(r)$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

の値を求めよ．