2015 年度（平成 27 年度）大学院入試

数 学 問 題

実施日時

2014 年（平成 26 年）11 月 15 日（土）

10:00〜12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない．
- 問題冊子は表紙も入れて５枚である．
- 問題は全部で４問である．
- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙１枚に記入すること．答案用紙の裏面に記入してもよい．
- <u>それぞれ</u>の答案用紙に<u>受験番号</u>，<u>氏名</u>，<u>問題番号</u>を記入すること．
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

[1] $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ を連続関数とする.

(1) $0 \leq a < b$ なるある実数 a, b に対し, $[a, b]$ 上で $f(x) \geq 0$ であり, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ ならば, $[a, b]$ 上で $f(x) = 0$ であることを示せ.

(2) $x \to \infty$ のとき $f(x)$ が収束するならば, f は有界関数であることを示せ.

(3) $x \to \infty$ のとき $f(x)$ が実数 α に収束するならば,

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)dx = \alpha$$

が成り立つことを示せ.

[2] nを自然数とし, $\mathbb{R}^n$ をn次元実列ベクトル空間とする. また $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を線形写像とする.

(1) W が$\mathbb{R}^n$ の部分空間ならば, $f(W) = \{f(x) \; ; \; x \in W\}$ も $\mathbb{R}^n$ の部分空間になることを示せ.

(2) 次のような条件 ($\sharp$) を考える.

($\sharp$) $\mathbb{R}^n$ の任意の$n-1$次元部分空間 W に対し, $f(W) \cap W \neq \{0\}$ である.

$n \geq 3$ かつ f が全単射ならば, 条件 ($\sharp$) が満たされることを示せ.

(3) $n = 3$ のとき, 条件 ($\sharp$) を満たすが全単射ではないような f の例を挙げよ. また挙げた例が要請をすべて満たすことを示せ.

[3] 距離空間 (X, d) の空でない真の閉部分集合を F とする. X 上の同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad x = y \quad \text{または「} x \in F \text{ かつ } y \in F \text{」}$$

により定め, X の $\sim$ による商位相空間を $M = X/\sim$ とおく.

(1) M はハウスドルフ空間であることを示せ.

(2) $F \cap G = \emptyset$ なる X の任意の閉集合 G がコンパクトであるならば, M はコンパクトであることを示せ.

(3) X は連結でないが, M は連結であるような X と F の例を挙げよ. また挙げた例が要請をすべて満たすことを示せ.

[4] $\mathbb{C}$ 上の複素関数 $f(z)$ を

$$f(z) = e^{iz^2}$$

で定める. ただし i は虚数単位とする.

(1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \geq 0\,, y \geq 0\}$ での広義積分 $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ を計算することにより, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を示せ.

(2) $r > 0$ に対し, 曲線 C_r を $C_r : z = re^{it}$ $(0 \leq t \leq \pi/4)$ で定める. このとき $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_{C_r} f(z)dz = 0$ を示せ.

(3) 扇形 $\Omega_r = \{z = \rho\, e^{i\theta} \ ; \ 0 \leq \rho \leq r,\ 0 \leq \theta \leq \pi/4\}$ $(r > 0)$ の境界で $f(z)$ の複素積分を考えることにより, 広義積分

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx, \quad \int_0^\infty \sin(x^2)dx$$

の値を求めよ.