2015年度（平成27年度）大学院入試

数学問題B

実施日時

2014年（平成26年）8月25日（月）

13:30〜16:30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて４枚, 問題は全部で３問である.
- ３問の中から ちょうど２問 を選択解答すること. 下の欄に, 受験番号, 氏名を記入し, 選択解答した問題の番号を○で囲め.

受験番号	氏名

選択問題番号			
	1	2	3

- 解答は, 問題ごとに別々の答案用紙１枚に記入すること. 答案用紙の裏面に記入してもよい.
- それぞれ の答案用紙に 受験番号, 氏名, 問題番号 を記入すること.
- 問題冊子の表紙, 答案用紙, 下書き用紙は終了後すべて提出し, 持ち帰ってはならない.

[1] 有理数体 $\mathbb{Q}$ に成分をもつ 2 次正方行列全体のなす非可換環を $\mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$ とし, また有理数係数の 1 変数多項式環を $\mathbb{Q}[X]$ とする. 多項式 $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ に対し, $f(X)$ を生成元とする $\mathbb{Q}[X]$ の単項イデアルを $(f(X))$ と表し, また $\mathbb{Q}[X]$ の $(f(X))$ による剰余環を $\mathbb{Q}[X]/(f(X))$ と表す. 次の問いに答えよ.

(1) $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ と $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$ が $f(A) = O$ (ただし O は零行列) をみたすとき, 写像

$$\varphi : \mathbb{Q}[X]/(f(X)) \ni [g(X)] \mapsto g(A) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$$

は剰余類の代表元の選び方によらずに定義でき, 環準同型写像となることを示せ. ただし $[g(X)]$ は $g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ を代表元とする剰余類とする.

(2) a, b を任意の有理数とする. 多項式 $f(X) = X^2 + aX + b$ に対し, 剰余環 $\mathbb{Q}[X]/(f(X))$ から $\mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$ への環準同型写像で単射となるものが存在することを示せ.

(3) $\mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$ の部分環 K が可換体でかつ

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \ ; \ a \in \mathbb{Q} \right\} \subsetneq K$$

をみたすとする. このとき, 既約な 2 次多項式 $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ で, 剰余環 $\mathbb{Q}[X]/(f(X))$ が K と同型になるものが存在することを示せ.

[2] 実直線 $\mathbb{R}$ 上の 2 点 x_1, x_2 が $x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$ をみたすとき同値であると定め, この同値関係による $\mathbb{R}$ の商位相空間を円周 S^1 と同一視し, $x \in \mathbb{R}$ を含む同値類を $[x] \in S^1$ と表すことにする. 区間 $[0,1]$ に $\mathbb{R}$ の相対位相を入れ, 直積位相空間 $S^1 \times [0,1]$ を A とおく. A の 2 点 $([x_1], t_1), ([x_2], t_2)$ は次の (a), (b), (c), (d) のいずれかをみたすとき同値であると定める.

(a) $([x_1], t_1) = ([x_2], t_2)$.

(b) $t_1 = 0$ かつ $t_2 = 1$ かつ $[3x_2] = [x_1]$.

(c) $t_1 = 1$ かつ $t_2 = 0$ かつ $[3x_1] = [x_2]$.

(d) $t_1 = 1$ かつ $t_2 = 1$ かつ $[3x_1] = [3x_2]$.

この同値関係による A の商位相空間を X とおき, $([x], t) \in A$ を含む同値類を $\langle x, t \rangle$ と表す. 次の問いに答えよ.

(1) X の閉集合 X_1, X_2 を次のように定める:

$$X_1 = \{ \langle x, t \rangle \in X \ ; \ (x, t) \in \mathbb{R} \times [0,1] \text{ かつ } t \notin (1/3, 2/3) \},$$
$$X_2 = \{ \langle x, t \rangle \in X \ ; \ (x, t) \in \mathbb{R} \times [0,1] \text{ かつ } 1/6 \leq t \leq 5/6 \}.$$

このとき X_1, X_2 はいずれも S^1 とホモトピー同値であることを示せ. ただし, 2 つの位相空間 Y と Z がホモトピー同値であるとは, 2 つの連続写像 $g : Y \to Z$, $h : Z \to Y$ で, $h \circ g$ が Y の恒等写像にホモトピックであり, かつ $g \circ h$ が Z の恒等写像にホモトピックであるようなものが存在することである.

(2) 2 次元整係数ホモロジー群 $H_2(X, \mathbb{Z})$ を求めよ. ただし, 必要ならば (1) の閉集合 X_1, X_2 を用いた X の表示 $X = X_1 \cup X_2$ に対応するマイヤー・ビートリス完全系列を用いてもよい.

(3) 1 次元整係数ホモロジー群 $H_1(X, \mathbb{Z})$ の元 α で, $\alpha \neq 0$ かつ $2\alpha = 0$ となるものが存在することを示せ.

[3] μ を $\mathbb{R}$ のボレル集合族上の有限測度とし,

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{z-t} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$$

と定める. 虚数単位を i で表す. 以下に現れる a, b は $a < b$ なる実数とする.

(1) f は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ.

(2) 各 $t \in \mathbb{R}$ に対し, 必要ならば場合分けを行い, 次の極限を求めよ:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\varepsilon}{(x-t)^2 + \varepsilon^2} dx.$$

(3) 次を示せ:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b (f(x - i\varepsilon) - f(x + i\varepsilon)) dx = \frac{1}{2}\mu(\{a\}) + \frac{1}{2}\mu(\{b\}) + \mu((a, b)).$$

(4) 実数 x_0 の $\mathbb{C}$ での近傍 U と, U 上で定義された複素数値連続関数 g が存在し, $U \setminus \mathbb{R}$ 上では $f(z) = g(z)$ が成り立つとする. このとき

$$\mu((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = 0$$

となる $\delta > 0$ が存在することを示せ.