2014年度（平成26年度）大学院入試

数 学 問 題 A

実施日時

2013年（平成25年）8月21日（水）

9:00 〜 12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて５枚である.
- 問題は全部で４問である.
- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙１枚に記入すること．答案用紙の裏面に記入してもよい.
- それぞれ の答案用紙に 受験番号，氏名，問題番号 を記入すること.
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

[1]　開区間 $(0,\infty)$ において C^1 級で $f(x)+f(1/x)$ が定数関数となるような実数値関数 f の全体を $\mathbf{F}$ とする．このとき，以下を示せ．

(1) 逆正接関数 $\operatorname{Arctan} x$ は $\mathbf{F}$ に属する．

(2) $f \in \mathbf{F}$ のとき，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ が収束することと，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{f(x)}{x^2}dx$ が収束することは同値である．

(3) 開区間 $(0,1)$ 上の C^1 級関数 g が $\mathbf{F}$ に属する関数に拡張されるための必要十分条件は，有限な左極限

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{dg}{dx}(x)$$

が存在することである．

[2]　関数 $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ を

$$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \sin x, \quad f_3(x) = \cos 2x, \quad f_4(x) = \sin 2x$$

で定め，$S = \{f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x)\}$ とおく．$\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数全体のなす $\mathbb{R}$ 線形空間において，S で生成される部分空間を V とする．

(1) S は V の基底であることを示せ.

(2) 線形変換 $\Phi : V \to V$ および $\Psi : V \to V$ を

$$\Phi(g(x)) = \frac{dg}{dx}(x), \quad \Psi(g(x)) = g(x + \pi/2)$$

で定める．Φ および Ψ の基底 S に関する表現行列を求めよ.

(3) $\Phi(g(x)) - \Psi(g(x)) = \cos 2x$ となる $g(x) \in V$ をすべて求めよ.

[3]　2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ 上の同値関係 $\sim$ を次のように定める.

$(x, y),\ (x', y') \in \mathbb{R}^2$ に対し

$(x, y) \sim (x', y') \iff x' = tx,\ y' = t^{-1}y$ を同時にみたす実数 $t \neq 0$ が存在する.

この同値関係による $\mathbb{R}^2$ の商位相空間を

$$Q = \mathbb{R}^2 / \sim$$

とする.（従って Q の部分集合 U が Q の開集合であるとは，商写像 $\pi : \mathbb{R}^2 \to Q$ による U の逆像 $\pi^{-1}(U)$ が $\mathbb{R}^2$ の開集合であるときに言う.）このとき，以下を示せ.

(1) Q は連結である.

(2) Q はハウスドルフ空間ではない.

(3) Q はコンパクトではない.

[4]　i は虚数単位を表すものとする．複素平面内の単位開円板 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ と単位円周 $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ を考える．$z \in D$ に対して，複素線積分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - 2) - z}$$

によって関数 $f : D \to \mathbb{C}$ を定義する．ただし，積分路は C を反時計回りに 1 周するものとする．このとき，以下を示せ.

(1) $f(z)$ は D において正則である.

(2) n を非負整数とするとき

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}(\zeta - 2)^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{(n!)^2\ 2^{2n+1}}$$

が成り立つ.

(3) $z \in D$ に対して

$$f(z) = \frac{-1}{2\sqrt{z+1}}$$

が成り立つ.