数学専攻入学試験 (2007.11/24. 10:00–12:00)

問題は全部で４問である．解答には問題ごとに別々の答案用紙を用い，それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること．答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

以下では、$\mathbf{R}$ は実数全体の集合をあらわし、$\mathbf{R}$ の n 個の直積を、$\mathbf{R}^n$ と書く.

問題１　$\mathbf{R}^n$ の２つのベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

にたいして内積 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ を

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

で定義する．A を $n \times n$ 実交代行列とする．(${}^tA$ を A の転置行列とするとき，${}^tA = -A$ を満たす行列 A を交代行列とよぶ.) B をすべての固有値が正となる実対称 $n \times n$ 行列とする.

(1) 任意のベクトル $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ にたいして

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$$

となることを示せ.

(2) 任意のベクトル $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ にたいして

$$\langle B\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$$

であり、等号は $\mathbf{x} = 0$ のときに限ることを示せ.

(3) $A + B$ は正則行列となることを示せ.

問題 2

(1) 複素関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^4 + 1}$ の $z = e^{\frac{i\pi}{4}}$ における留数を求めよ.

(2) 定積分

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4 + 1} dx$$

を求めよ.

問題 3　α を実数とする.
(1)　$\varphi(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の微分可能な関数とし

$$f(x,y) = x^{\alpha}\varphi(\frac{y}{x}), \quad (x,y) \in (0,\infty) \times \mathbf{R}$$

とおくとき，$f(x,y)$ は

$$x f_x(x,y) + y f_y(x,y) = \alpha f(x,y), \quad (x,y) \in (0,\infty) \times \mathbf{R} \qquad (*)$$

を満たすことを示せ.
(2)　全微分可能な $(0,\infty) \times \mathbf{R}$ 上の関数 $f(x,y)$ が $(*)$ を満たすとき，任意の正の実数 t にたいして

$$\frac{f(tx,ty)}{t^{\alpha}} = f(x,y), \quad (x,y) \in (0,\infty) \times \mathbf{R}$$

が成立し，ある $\mathbf{R}$ 上の関数 $\psi(x)$ を用いて

$$f(x,y) = x^{\alpha}\psi(\frac{y}{x}), \quad (x,y) \in (0,\infty) \times \mathbf{R}$$

と表されることを示せ.

問題 4　3変数実2次形式

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

にたいして

$$C_f := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 ; f(x_1,x_2,x_3) > 0\}$$

とおき, $\mathbf{R}^3$ の相対位相によって C_f を位相空間とみなす. このとき C_f の連結成分の個数を求めよ.