2007年度（平成19年度） 大学院入試

数 学 問 題 B

実施日時：2006年（平成18年）8月30日（水）
13:30 〜 16:30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて4枚，問題は全部で3問である.
- 3問の中からちょうど2問を選択解答すること. 下の欄に，受験番号，氏名を記入し，選択解答した問題の番号を ◯ で囲め.

受験番号	氏名

選択問題番号			
	1	**2**	**3**

- 解答には問題ごとに別々の答案用紙を用い，それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること.
- 問題冊子の表紙，答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

[**1**] p を素数とし，$\mathbb{Z}$ を整数全体のなす環とする．このとき $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ の乗法に関する可逆元 a は $a^{p(p-1)} = 1$ を満たすことを示せ．ただし右辺の 1 は環 $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ の乗法に関する単位元を表す．

[2] 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ の部分集合 M を次で定める.

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 1, \quad x_1 x_2 + x_3 x_4 = 0\}.$$

(1) M は, C^∞ 級微分可能多様体 $\mathbb{R}^4$ の C^∞ 級部分多様体であることを示せ.

(2) M はコンパクトかどうか調べよ.

[3] μ を $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度とし，f を $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ 上の実数値ルベーグ可測関数で，$\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\, d\mu(x) < \infty$ を満たすものとする．$\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ の実軸と同一視することにより，$I \subset \mathbb{C}$ と見なす.

(1) 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus I$ に対して，ルベーグ積分

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{z - x}\, d\mu(x)$$

が存在することを示せ.

(2) 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus I$ に対して，

$$g(z) = \int_0^1 \frac{f(x)}{z - x}\, d\mu(x)$$

とおく．$g(z)$ は z の関数として $\mathbb{C} \setminus I$ 上連続であることを示せ.

(3) 次の等式

$$\int_{|z|=2} g(z)\, dz = 2\pi i \int_0^1 f(x)\, d\mu(x)$$

を示せ．ただし，円周 $|z| = 2$ には反時計まわりの向きをつける.