2007 年度（平成 19 年度）大学院入試

数　学　問　題　A

実施日時：2006 年（平成 18 年）8 月 30 日（水）
9 : 00 ～ 12 : 00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて 5 枚である.
- 問題は全部で 4 問である.
- 解答には問題ごとに別々の答案用紙を用い，それぞれ の答案用紙に 受験番号，氏名，問題番号 を記入すること.
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

[1] $f(x)$ を $x>1$ で定義された実数値 C^1 級関数とする.

(1) $y \geq x > 1$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ.

$$|f(y)-f(x)| \leq \int_x^y |f'(t)|dt.$$

(2) ある $A>0$ と $c>1$ が存在して

$$|f'(x)| \leq Ax^{-c} \quad (x>1)$$

が成り立つとする.

(i) $f(x)$ は $x \to \infty$ のとき，ある実数 α に収束することを示せ.

(ii) (i) の α は次の不等式を満たすことを示せ.

$$|f(x)-\alpha| \leq \frac{A}{c-1}x^{1-c} \quad (x>1).$$

[2] 以下，実数を成分とする行列を考える．A を $m \times n$ 行列，B_1, B_2 を m 次正則行列，C_1, C_2 を n 次正則行列で，次の等式を満たすものとする．

$$B_1 A C_1 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_2 A C_2 = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ただし r, s は 0 以上の整数で，I_r は r 次単位行列，I_s は s 次単位行列，0 は零行列を表す．($r = 0$ または $s = 0$ の場合，対応する右辺の行列は零行列とみなすものとする．)

このとき $r = s$ であることを示せ．

[3] X をコンパクト位相空間, Y を位相空間, y_0 を Y の点とする.
$f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ を直積位相空間 $X \times Y$ 上の連続関数とし,

$$\text{任意の } x \in X \text{ に対し, } f(x, y_0) \neq 0$$

を満たすとする. このとき y_0 の開近傍 $U \subset Y$ で, 条件

$$(\star) \qquad \text{任意の } (x, y) \in X \times U \text{ に対し, } f(x, y) \neq 0$$

を満たすものが存在することを示せ.

[**4**] r を正の実数とする．複素平面 $\mathbb{C}$ において，1 を中心とする半径 r の円周に，反時計まわりの向きをつけたものを Γ_r とする．

$r \neq 1$ のとき，複素線積分

$$\int_{\Gamma_r} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4}\, dz$$

の値を求めよ．