数学専攻入学試験 (11/26, 2005)

[1]　$(0,+\infty)$ 上の実数値 C^2 級関数 f に対して，$u(x) = f(r)$ $\ (x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ x \neq 0,\ r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2})$ とおくとき，次の等式を示せ.

$$\Delta u(x) = f''(r) + \frac{d-1}{r} f'(r) \qquad (x \in \mathbb{R}^d,\ x \neq 0)$$

ただし，$\Delta u(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x)$ である.

[2]　広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2at-t^2}\, dt$$

を平面上の積分に帰着させることによって，その値を求めよ．ただし，a は実定数である.

[3]　$A^2 = A$ をみたす n 次複素正方行列 A は，対角化可能であることを示せ．また，A の階数とトレース (跡) は一致することを示せ.

[4]　コンパクトな位相空間 X の空でない閉部分集合 Y は，コンパクトであることを示せ.

[5]　複素積分

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)(1-az)} \quad (0 < a < 1)$$

の値を求めることにより，等式

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} = \frac{2\pi}{1-a^2}$$

を示せ.