平成18年度 大学院入試

数　学　問　題　A

実施日時

平成17年8月29日 (月)

9:00 〜 12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて5枚である.
- 問題は全部で4問である.
- 解答には問題ごとに別々の答案用紙を用い, それぞれ の答案用紙に 受験番号, 氏名, 問題番号 を記入すること.
- 答案用紙, 下書き用紙は, 終了後すべて提出し, 持ち帰ってはならない.

問題 1

実ベクトル空間 $\mathbf{R}^n = \{(x_1, ..., x_n)\ ;\ x_i \in \mathbf{R},\ 1 \leqq i \leqq n\}$ を考える．

(1) V を $\mathbf{R}^n$ の部分空間で，$\dim V \leqq n-1$ をみたすものとする．このとき，$\mathbf{R}^n$ 上の一次関数

$$F(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \quad (a_1, ..., a_n) \neq (0, ..., 0)$$

で，V 上恒等的に零になるようなものが存在することを示せ.

(2) V を $\mathbf{R}^n$ の部分空間で，$\dim V \leqq n-2$ をみたすものとする．$\mathbf{R}^n$ の元 $\mathbf{b}$ に対して，

$$V_{\mathbf{b}} = \{\mathbf{x} + \mathbf{b}\ ;\ \mathbf{x} \in V\}$$

とおく．このとき，一次関数

$$F(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \quad (a_1, ..., a_n) \neq (0, ..., 0)$$

で，$V_{\mathbf{b}}$ 上恒等的に零になるものが存在することを示せ.

問題 2

平面 $\mathbf{R}^2 = \{(x, y)\ ;\ x, y \in \mathbf{R}\}$ を考える．$\mathbf{R}^2$ 上の同値関係 $\sim$ を, 次により定義する：

$$(x, y) \sim (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad x' = tx,\ y' = t^{-1}y \text{ となる } t \neq 0 \text{ が存在する.}$$

この同値関係による $\mathbf{R}^2$ の商空間 $Y = \mathbf{R}^2/\sim$ に商位相を入れて, 位相空間とみなす．（すなわち, 部分集合 $U \subset Y$ が開集合 $\Leftrightarrow$ $\pi^{-1}(U)$ が $\mathbf{R}^2$ の開集合. ただし, $\pi : \mathbf{R}^2 \to Y$ は自然な射影を表す.)

次の問いに答えよ.

(1) 各同値類を $\mathbf{R}^2$ 内に図示せよ．さらに, 同値類のうち $\mathbf{R}^2$ 内で閉集合でないものを列挙せよ.

(2) Y はハウスドルフ空間でないことを示せ.

(3) $\mathbf{R}^2$ 上の多項式関数 $f(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j,\ a_{ij} \in \mathbf{R}$, のうち, どの同値類の上でも定数となるものをすべて求めよ.

(4) (3) で求めた多項式関数全体の集合を E とし, 各同値類 D 上での $f \in E$ の値を $f(D)$ で表す．このとき, 次の条件 (*) をみたす同値類の対 $(D, D'), D \neq D'$, をすべて求めよ.

(*) すべての $f \in E$ に対し $f(D) = f(D')$.

問題 3

　行列 $A = (-111-1)$ および実ベクトル $\mathbf{b} = (bc)$ をあたえるとき, 次の重積分の収束・発散を判定せよ：

$$I = \iint_{\{x+y \geqq 0\}} e^{\langle A\mathbf{x}+\mathbf{b}, \mathbf{x}\rangle}\, dxdy.$$

ここで $\mathbf{x} = (xy)$, また $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbf{R}^2$ の標準内積をあらわす.

　ただし, 次の事実は用いてよい：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx < +\infty.$$

問題 4

$f(z)$ は $0 < |z| < 2$ における正則関数で, 原点 $z = 0$ は極であると仮定する. さらに

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \iint_{\varepsilon < |z| < 1} |f(z)|\, dxdy < +\infty \qquad (z = x + i\, y)$$

であるならば, $f(z)$ の極 $z = 0$ の位数は 1 であることを証明せよ.