平成 17 年度 大学院入試

数　学　問　題　A

実施日時：平成 16 年 8 月 30 日（月）
9 : 00 〜 12 : 00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて 5 枚である.
- 問題は全部で 4 問である.
- 解答には問題ごとに別々の答案用紙を用い，それぞれ の答案用紙に 受験番号, 氏名，問題番号 を記入すること.
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

[1] m, n は $1 \leqq m < n$ であるような整数として, $\mathbb{C}^m$ および $\mathbb{C}^n$ をそれぞれ m 次元および n 次元の複素列ベクトル空間とする． m 行 n 列の複素行列 A と n 行 m 列の複素行列 B から，線形写像 $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ と $g\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ をそれぞれ $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, $g(\boldsymbol{y}) = B\boldsymbol{y}$ により定義する． m 次正方行列 AB が正則であると仮定する．このとき以下の問に答えよ．

(1) $\dim \mathrm{Ker}(f) = n - m$ かつ $\dim \mathrm{Ker}(g) = 0$ となることを示せ．

(2) AB の相異なる固有値全体を $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ とするとき，BA の相異なる固有値全体は $0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ となることを示せ．

(3) AB が対角化可能ならば，BA も対角化可能であることを示せ．

[2] X, Y を位相空間とし，$f \colon X \to Y$ を連続な全射とする．f が条件

「$f^{-1}(B)$ が X の開集合ならば B は Y の開集合である」

をみたすとき，f を商写像という．

(1) f が商写像であるためには，f が条件

「$f^{-1}(B)$ が X の閉集合ならば B は Y の閉集合である」

をみたすことが必要十分であることを示せ．

(2) X がコンパクト空間であり，かつ，Y が Hausdorff 空間であるならば，f は商写像であることを示せ．

[3] **(1)** 任意の正の数 x に対して，無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$$

が収束することを示せ.

(2) $x>0$ で定義される関数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$$

が $x=1$ において微分可能であることを示し，$f'(1)$ の値を求めよ.

[**4**] **(1)** 複素関数

$$\frac{2z}{1+z^2} \qquad (ただし\ |z| < 1)$$

を，$z = 0$ を中心に巾級数展開せよ.

(2) $f(z) = \log(1+z^2)$ を，$f(0) = 0$ となるように定めた $\{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \,\}$ 上の正則関数とする．このとき

$$\int_C \frac{f(z)}{z^n} dz$$

を求めよ．ここに n は正の整数で，$C = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{1}{2} \,\}$ であり，積分は反時計回りに 1 周するものとする.