平成１６年度 大学院入試

数　学　問　題　B

実施日時：平成１５年８月２７日（水）
13:30 〜 16:30

- 監督者の合図があるまで開いてはならない．
- 問題用紙は表紙も入れて４枚である．
- 3 問の中から 2 問を選択解答すること．受験番号，氏名を記入し，選択解答した問題の番号を下の表に ◯ 印で明示せよ．

受験番号	氏名

問題番号	◯ 欄
1	
2	
3	

２つより多くの ◯ をつけてはならない

- 解答には問題ごとに別々の答案用紙を用い，それぞれ の答案用紙に受験番号，氏名，問題番号 を記入すること．
- 問題用紙の表紙，答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

[**1**] R を体 k 上の 2 変数多項式環 $k[x, y]$ とする．単項式 ax^iy^j $(a \in k \setminus \{0\})$ の次数を $i + j$ と定め，$R \setminus \{0\}$ の元 f に対し，次数 $\deg f$ を f の各項の次数のうち最大の値と定める．

(1) $f, g \in R \setminus \{0\}$ に対し

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g$$

を示せ．

(2) x は R の既約元であることを示せ．

(3) x と y で生成されるイデアル $I = (x, y)$ は単項イデアルではないことを示せ．

(4) p を $p + 1$ が 4 の倍数となる素数とし， $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ とする．このとき $J = (y, x^2 + 1)$ は素イデアルであることを示せ．

[**2**] $\mathbb{R}^3$ の部分多様体 $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1,\ |z|<1\}$ に対して，写像 $\varphi : C \to C$ を

$$\varphi(x,y,z) := (-x,-y,-z)$$

によって定義する．C 上の２点 p,q は $q=p$ または $q=\varphi(p)$ となるとき同値と定め，この同値関係 $\sim$ で定まる商空間 $M = C/\sim$ を考える．以下の問に答えよ．

(1) M の基本群を求めよ．

(2) 自然な射影 $\pi : C \to M$ が局所微分同相写像になるような多様体の構造を M に与えよ．ただし，π が局所微分同相とは，C の各点 p に対して p の適当な近傍 U で $\pi : U \to \pi(U)$ が微分同相となるようなものが存在することをいう．

(3) $a>1$ とするとき，

$$F(x,y,z) = ((a+yz)(x^2-y^2),\ 2xy(a+yz),\ xz)$$

は M から $\mathbb{R}^3$ への C^∞ 写像 $\overline{F}$ を与えることを示せ．

(4) (3) で与えられた $\overline{F} : M \to \mathbb{R}^3$ がはめ込みとなることを示せ．

[**3**] **(1)** 任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して，関数 $e^{-ix\xi - x^2}$ は $-\infty < x < \infty$ で可積分であることを示せ.

(2)

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi - x^2} dx$$

とおくとき，$f(\xi)$ は ξ の連続関数であることを示せ.

(3) すべての $h \in \mathbb{R}$ $(h \neq 0)$, $x \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left| \frac{e^{-ix(\xi+h)} - e^{-ix\xi}}{h} \right| \leq |x|$$

が成立することを示せ.

(4) (2) で定義した $f(\xi)$ は ξ について C^1 級であることを示せ.