平成１５年度 大学院入試

数　学　問　題　B

実施日時：平成１４年８月２８日（水）
13:00 〜 16:00

- 監督者の合図があるまで開いてはならない．
- 問題用紙は表紙も入れて４枚である．
- 問題は全部で３問である．
- 解答には問題ごとに別々の答案用紙を用い，それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号 を記入すること．
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

[**1**] 複素数平面 $\mathbb{C}$ 内の穴あき円板 $0 < |z| \leqq 1$ 上に複素数値連続関数 $f(z)$ が与えられている． $f(z)$ は $0 < |z| < 1$ で正則で零点をもたず, 円周 $|z| = 1$ 上では $|f(z)| = 1$ をみたすと仮定する．単位円板の外側 $|z| \geqq 1$ で関数 $g(z)$ を

$$z\,\overline{w} = 1 \ \text{ のとき } \ g(z)\,\overline{f(w)} = 1$$

によって定義し,

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & (0 < |z| \leqq 1 \text{ のとき}) \\ g(z) & (|z| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおく．以下のことを示せ.

(1) $g(z)$ は $|z| > 1$ で正則である.

(2) $|z| = 1$ 上 $f(z) = g(z)$ である.

(3) $h(z)$ は $z \neq 0$ で連続である.

(4) $h(z)$ は $z \neq 0$ で正則である.

[2] $\mathbb{R}$ 上の関数 $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_8(x)$ を

$$v_j(x) = x^{j-1}\sin x,\quad v_{4+j}(x) = x^{j-1}\cos x \quad (1 \leqq j \leqq 4)$$

で与える． $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_8(x)$ の実係数一次結合全体からなる 8 次元実ベクトル空間を V とおく．線形写像 $D : V \to V$ を $D(f(x)) = \dfrac{df}{dx}(x)$ で定義する．以下の問に答えよ.

(1) V の基底 $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_8(x)$ に関する D の行列表示を求めよ.

(2) D の固有多項式を求めよ.

(3) V の 3 次元部分空間 W で $D(W) \subset W$ となるものは存在しないことを示せ.

[3] 実数列全体の集合を S とおき, S の部分集合 X を

$$X = \left\{ a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in S \;\middle|\; |a_n| \leqq \frac{1}{n^2} \ (n = 1, 2, \ldots) \right\}$$

で定義する. 関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を

$$d(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n| \qquad \left(a = (a_n)_{n=1}^{\infty},\ b = (b_n)_{n=1}^{\infty} \right)$$

で定める. 以下のことを示せ.

(1) (X, d) は距離空間である.

(2) X の点列 $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}, \ldots$ が距離 d に関して $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in X$ に収束するための必要十分条件は, 任意の n に対して第 n 成分よりなる数列 $\left(a_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ が a_n に収束することである.

(3) (X, d) は完備である.